

1. Rozhodněte, která z následujících funkcí je charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny.

(a)  $f_1(t) = \cos(t) + i \sin(t^3)$

(b)  $f_2(t) = \frac{\sin t}{2t} + \frac{1}{3-e^{-|t|}}$

(c)  $f_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{it} \max\{e^{-t^2}, e^{-t^4}\}$

(d)  $f_4(t) = \frac{1}{2} [\cos(\sqrt{|t|}) + \cos(2\sqrt{|t|})]$

(e)  $f_5(t) = \exp\left\{it + \frac{1}{3-e^{-|t|}} + \frac{1}{3-\cos(t)} - 1\right\}$ .

2. Necht'  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením  $N(0, n^2)$ .

(a) Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě následující řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2} X_k$$

(b) Rozhodněte o konvergenci skoro jistě následující posloupnosti a určete její limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n X_k^2$$

3. Necht'  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $(-n, n)$ . Rozhodněte o konvergenci v distribuci následující posloupnosti

$$Z_n = \frac{1}{n^{5/2}} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - EX_k^2).$$